Grundwissen 8 - Lösungen

Bereich 1: Proportionalität

1) Die in den Tabellen dargestellten Größen sind in beiden Fällen proportional. Entscheide, welche Art von Proportionalität jeweils vorliegt und vervollständige die Tabellen.

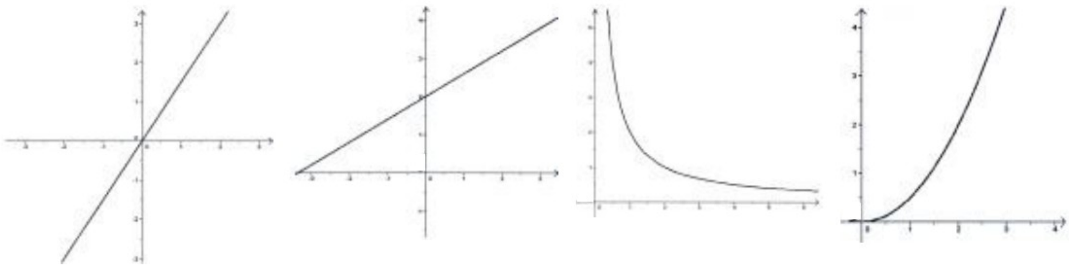
a) Direkte Proportionalität

x	0	**1**	1,8	2	**4**	5,5
y	0	3,1	**5,58**	6,2	12,4	**17,05**

b) Indirekte (umgekehrte) Proportionalität

x	0,1	0,2	0,5	**1**	**1,4**	2,5
y	10,5	**5,25**	2,1	1,05	0,75	**0,42**

2) Welche der vier Bilder zeigen den Graphen einer Proportionalität?



Erstes Bild: direkte Proportionalität (Gerade durch den Nullpunkt)
Drittes Bild: indirekte Proportionalität (Hyperbel)

3) Erwin hat eine 500 g Packung Erbsen gekauft und möchte herausfinden, wie viele Erbsen ungefähr darin enthalten sind. Er füllt 80 Erbsen in eine kleine Schale, die leer 5 g wiegt und liest für die gefüllte Schale 25 g von der Waage ab.

a) Wie viele Erbsen sind etwa in der 500 g Packung?

$$\boxed{20\,\text{g} \mathrel{\hat{=}} 80\,\text{Erbsen} \Rightarrow 500\,\text{g} \mathrel{\hat{=}} \text{etwa } 2000\,\text{Erbsen}}$$

b) Gib die beiden Größen an, deren Proportionalität du dabei verwendet hast.

Anzahl der Erbsen | **Masse der Erbsen** | Volumen der Erbsen
Waage | Masse der Packung | Volumen der Packung

4) Entscheide bei den folgenden Zuordnungen, ob es sich um eine direkte oder indirekte Proportion handelt! Begründe jeweils deine Antwort!

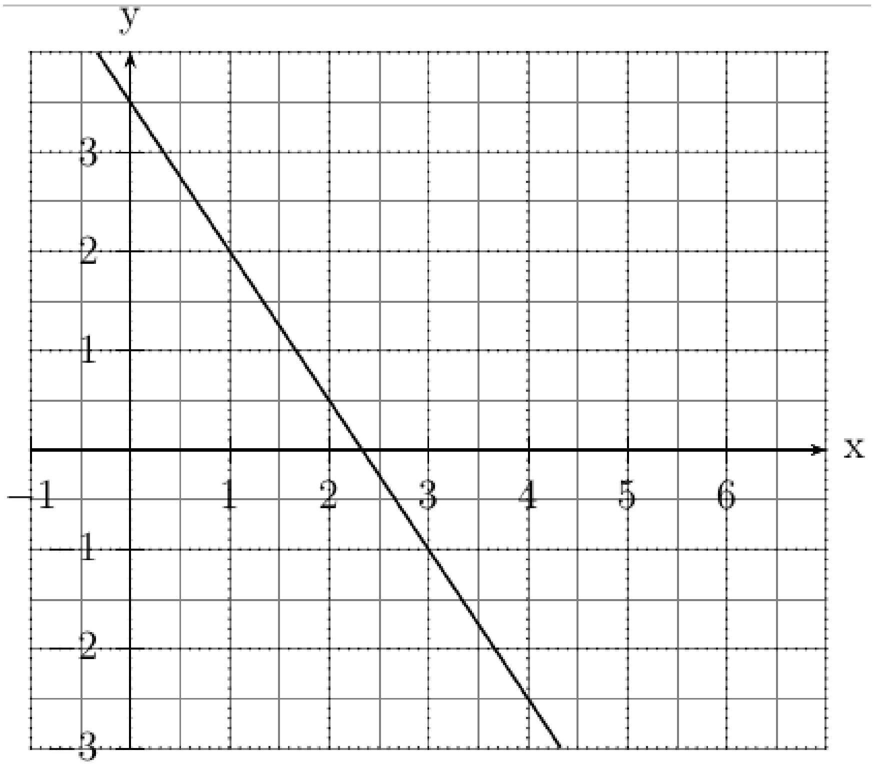
a) Durchmesser d eines Kreises $\rightarrow$ Umfang u des Kreise: direkte Proportionalität
Begründung: doppelter Durchmesser $\rightarrow$ doppelter Umfang

b) Verbrauchter Kraftstoff x im Tank eines $\rightarrow$ Pkw verbleibende Reichweite y:
gar keine Proportionalität; Begründung: nur der Rest im Tank sagt etwas über die verbleibende Reichweite aus!

c) Durchschnittsgeschwindigkeit x $\rightarrow$ Fahrzeit t für eine vorgegebene Strecke:
indirekte Proportionalität; Begr.: doppelte Geschwindigkeit $\rightarrow$ halbe Fahrzeit

Bereich 2: Funktionsbegriff allgemein; lineare Funktionen

5)



a) Welche Funktionsgleichung hat die eingezeichnete Gerade g? $\boxed{y=-1{,}5\,x+3}$

b) Zeichne eine weitere Gerade h mit der Funktionsgleichung y = 0,5x – 0,5 ein.

c) Bestimme bei der Geraden h die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
X(1/0) und Y(0/-0,5)

6) Bestimme die Funktionsgleichung einer Gerade, die durch folgende zwei Punkte verläuft.

a) A(2/0), B(0/1,5) : $\boxed{y=-0{,}75\,x+1{,}5}$

b) S(1/2), T(-2/-4) : $\boxed{y=2x}$

7) Gegeben sind g: $y = 2x - 3{,}5$ und h: $10y + 4x = 25$.

Zeichne die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem mit Hilfe ihrer Steigungsdreiecke und bestimme graphisch die Koordinaten ihres Schnittpunkts!
g: Steigung m = 2; y-Achsen-Abschnitt t = -3,5; h: nach y auflösen ergibt m = -0,4 und t = 2,5
Zeichnung liefert den Schnittpunkt S(2,5/1,5)

8) Hängt man an eine Schraubenfeder Gewichtstücke, dann dehnt sie sich. Für den Zusammenhang zwischen der Masse x des Gewichtstücks und der Länge y der Feder gilt eine lineare Funktion. Bestimme die Funktionsgleichung anhand der Tabelle:

Masse des Gewichts x in g	0	50
Länge Feder y in cm	15	19

$y=m\cdot x+t;\qquad m=\frac{19-15}{50-0}=0{,}08$

$t=15$ **=>** $\boxed{y=0{,}08\,x+15}$

Bereich 3: lineare Gleichungssysteme

9) Löse folgendes Gleichungssystem:

I. $3x - 2y = 4$
II. $6x - 3y = 3$

3x - 2y = 4 / · (-2) und dann z. B. weiter mit dem Additionsverfahren
6x - 3y = 3 Lösung: x = -2 und y = -5 bzw. (-2/-5)

10) Löse das Gleichungssystem:

I. $3x + 11y = 9$

II. $6(2x - 3y) - 7(2x - 3y) = 25$

Zuerst die zweite Gleichung vereinfachen bis z. B. -2x + 3y = 25. ......
Additionsverfahren. .... Lösung: x = -8 und y = 3 bzw. (-8/3).

11) Vater ist 34 Jahre älter als sein Sohn Stefan. In 5 Jahren werden beide zusammen 6mal so alt sein wie Stefan jetzt ist. Wie alt ist Stefans Vater jetzt?
Am besten zwei Gleichungen aufstellen:
v – 34 = s (Wenn man vom Alter des Vaters 34 abzieht hat man das Alter vom Sohn).
(v +5) + (s + 5) = 6 · s (Das ist der Stand in 5 Jahren. Man kann natürlich die Klammern weglassen; Gleichungssystem lösen: v = 45 und s = 11 also: Der Vater ist heute 45 und der Sohn 11 Jahre alt.

Bereich 4: Bruchterme in Funktionen und Gleichungen

12) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Es soll der zugehörige Graph gezeichnet werden.

Lege dazu möglichst geschickt eine geeignete Wertetabelle an und zeichne den Graph, sodass die wesentlichen Eigenschaften sichtbar werden! Gib auch die Asymptoten an!

Aus dem Funktionsterm kann man einiges ablesen, was Rückschlüsse auf den Graphen ermöglicht: D = R \ {2}. Das sieht man, weil für **x = 2** der Nenner 0 wird und x für 2 nicht eingesetzt werden darf. Hier hat der Graph also eine **senkrechte Asymptote**.
Betrachtung des Zählers: Für x = 1 wird der Zähler 0. Also haben wir hier eine Nullstelle: N(1/0). Stellt man sich vor, man würde für x im Zähler und im Nenner eine sehr große oder sehr kleine Zahl einsetzen, dann würde man in beiden fällen einen Funktionswert von fast 1 erreichen. Hier haben wir also eine **waagerechte Asymptote: y = 1**.
In die Zeichnung trägt man die bisherigen Ergebnisse ein. Es bietet an, noch ein paar Punkte z. B. zwischen -1 < x < 4 und um x = 2 herum auszurechnen.

13) Bestimme die Definitionsmenge und löse die Gleichung: $\frac{2x}{3x-9} - \frac{x+3}{6x} = \frac{x-2}{2x-6}$
Hier ist es wichtig, sich zuerst den Nenner anzuschauen.

Man erkennt hoffentlich, dass man so einiges ausklammern kann:
3x – 9 = 3 (x – 3) und 2x – 6 = 2 (x – 3); H N ist also 3 · (x – 3) · 2 · x
Man erweitert nun die einzelnen Brüche mit den fehlenden Faktoren. Dann multipliziert man die ganze Gleichung mit dem HN, der fällt dadurch weg.
Es bleibt: $4x^2$ - (x + 3) (x – 3) = (x – 2) · 3x; Alles vereinfachen, nach x auflösen...
Ergebnis: $\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Bereich 5: Laplace- Experimente

14) Ein normaler Spielwürfel (=Laplace Würfel) wird zweimal geworfen. Schreibe jeweils die Ereignismenge auf und berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) Erst kommt die 1 und dann die 3. E = {(1/3)}, $\boxed{P=\frac{1}{36}}$

b) Die beiden Augenzahlen sind gleich. E = {(1/1), (2/2), (3/3), (4/4), (5/5), (6/6)} $\boxed{P=\frac{1}{6}}$

c) Es kommt genau einmal eine 2.

E = {(2/1), (2/3), (2/4), (2/5), (2/6), (1/2), (3/2), (4/2), (5/2), (6/2)} $\boxed{P=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}}$

15) Drei Mädchen und drei Jungen treffen sich zu einer Party. Es gibt zwei Tische mit je drei Plätzen. Um die Gesellschaft etwas aufzulockern, werden die Plätze ausgelost.

a) Wie viele verschiedene Platzierungen sind möglich? (mit Ansatz!)

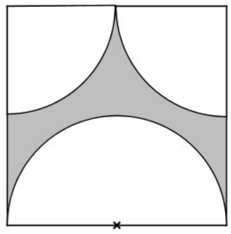
$\boxed{n=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!=720}$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen alle drei Mädchen am selben Tisch?

$\boxed{P=\frac{2\cdot3!\cdot3!}{6!}=\frac{1}{10}}$

Bereich 6: Geometrie

16) Gegeben ist das skizzierte Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm.



a) Berechne den Umfang des grau dargestellten Teils in cm auf 1 Kommastelle gerundet!
Die Kreisbögen ergeben zusammen einen kompletten Kreisumfang: $\boxed{u = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 18{,}8\,\text{cm}}$

b) Wieviel Prozent der Rechteckfläche beträgt diese Teilfläche auf ganze Prozent gerundet?
A(Quadrat) = 36 cm²   A (Kreis) = $\pi \cdot r^2$ also A(Kreis) ≈ 28,27 cm²

A(„grau“) = A(Quadrat) - A(Kreis) ≈ 7,73 cm²; Anteil = $\boxed{\frac{7{,}73}{36} \approx 21\ \%}$

17) Von einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge 18 cm werden vier Eckquadrate der Seitenlänge x abgeschnitten und die Seiten entlang der gestrichelten Linie nach oben gefaltet, so dass eine oben offene Schachtel entsteht.
a) Welches Volumen hat eine solche Schachtel für x = 4 cm?
Man zeichnet sich eine Skizze, indem man das Quadrat zeichnet und die kleinen Quadrate in die Ecken. Die Länge der Seiten der kleinen Quadrate beträgt x. So gilt für die Länge einer Seite des großen Quadrats: 18 cm = x cm + y cm + x cm. Wenn x = 4 cm ist also y = 10 cm . y ist aber auch die Länge des „Bodenquadrats“ der Schachtel. Die Höhe der Schachtel ist x, also hier 4 cm. Volumen (Schachtel) = 10 cm · 10 cm · 4 cm = 400 cm³ (= 0,4 dm³)

b) Bestimme einen Funktionsterm f(x) für das Volumen dieser Schachtel und gib auch die Definitionsmenge an!
ohne Einheiten: V = y ·y · x   also V = (18 – 2x) ·(18 – 2x) · x oder $V = (18 - 2x)^2 \cdot x$
Für die Definitionsmenge: Eine Seite des Kartons ist 18 cm lang. Wenn man von beiden Seiten 9 cm für x abschneiden würde, bliebe in der Mitte nichts mehr übrig. Also darf man nur weniger als 9 cm abschneiden. D = {x / x < 9}.

18) In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(1/5), B(8/7) und P(13/4) gegeben. Konstruiere eine Kreislinie, die durch P geht und die Gerade AB in B berührt!

Überlegung: Die Gerade durch A und B ist die Tangente an den Kreis. Berührpunkt ist B. Man konstruiert deshalb zuerst ein Lot zu AB durch den Punkt B. Der Kreis verläuft außerdem durch P. Er soll auch durch B laufen. Der Mittelpunkt des Kreises ist also gleich weit von P und B entfernt. Man konstruiert die Mittelsenkrechte von P und B. Da, wo sich Lot und Mittelsenkrechte schneiden ist M. Jetzt kann man den Kreis einfach zeichnen.