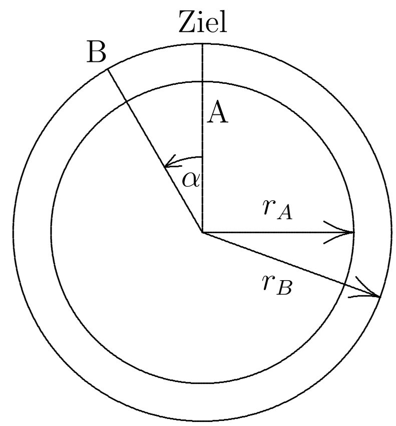
Kreis und Kugel

1. Gib folgende Winkel
   (a) im Gradmaß auf 3 geltende Ziffern genau an: $\frac{3}{4}\pi$; 2,87
   (b) im Bogenmaß als Vielfache von π und als gerundete Dezimalzahl an: 120°; 72°

2. Die Läufer A(nton) und B(enedikt) starten einen Wettlauf auf einer kreisförmigen Rennbahn. Die Kreisbahn von A hat den Radius $r_A = 19\,\text{m}$, die von B den Radius $r_B = 20\,\text{m}$. A muss eine Runde laufen.

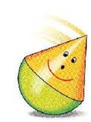


   (a) Damit beide bis zum Ziel gleich weit laufen, muss der Startpunkt von B um einen bestimmten Winkel vorverlegt werden. Bestimmen Sie diesen Winkel α. (18°)
   (b) Welche Fläche hat die Rennbahn und der Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α?

3. 20 kleine und gleich große Kanonenkugeln mit Radius 3 cm werden zu einer größeren Kanonenkugel zusammengeschmolzen.
   (a) Welchen Radius hat die große Kugel?
   (b) Vergleichen Sie die Oberfläche der neuen Kugel mit der Gesamtoberfläche der 20 Kugeln.

4. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?
   (b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

5. Ein 11 cm hohes Stehaufmännchen besteht aus einer Halbkugel von 4 cm Radius und einem aufgesetzten Kegel. Beide Teile sind aus dem gleichen Material.



   (a) Bestimmen Sie den Rauminhalt und die Oberfläche.
   (b) Wie viel Prozent des Rauminhaltes befinden sich in der Ruhelage unterhalb des Kugelmittelpunktes?
   (c) Damit ein Stehaufmännchen funktioniert, darf der aufgesetzte Kegel höchstens so schwer sein wie die Halbkugel. Ist das hier der Fall?
   (d) Wie hoch darf bei einem Stehaufmännchen der aufgesetzte Kegel höchstens sein, damit das Stehaufmännchen funktioniert?

Trigonometrische Funktionen

6. Bestimmen Sie im Intervall $[0^o; 360^o]$ bzw. $[0; 2\pi]$ die Winkel im Grad- und Bogenmaß (auf eine Dezimale genau), für welche gilt: $\cos x = -0{,}3759$

7. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Dieser Kreis sei der Einheitskreis.

   (a) Bestimmen Sie aus der Zeichnung mit größtmöglicher Genauigkeit $\sin 40^o$ und $\cos 40^o$ und berechnen Sie daraus $\tan 40^o$.

   (b) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit alle Winkel β, so dass $\sin\beta = 0{,}8$.

   (c) Veranschaulichen Sie die Gleichung $\sin 230^o = \sin 310^o$. Welche allgemeine Formel liegt dieser Gleichung zugrunde?

8. Begründen Sie anhand einer Zeichnung (Einheitskreis):

$$\text{Für } 270^o < \alpha < 360^o \text{ gilt: } \sin\alpha = -\sin(360^o - \alpha)$$

9. Zeichnen Sie für $x \in [-2\pi; 2\pi]$ mit verschiedenen Farben der Reihe nach die Graphen von

   (a) $f(x) = \sin x$, (b) $g(x) = \sin 3x$, (c) $h(x) = -2 \cdot \sin(3x - \pi) + 2$

   und geben Sie jeweils Periode und Amplitude an.

Exponentielles Wachstum und Logarithmus

10. Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
    Bei einer Untersuchung wird einem Patienten $0,2$ Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch $0,09$ Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
    Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

11. Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Nach wie vielen Tagen sind 95% einer ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen?

12. Fred S. soll in seiner Bio - Facharbeit untersuchen, ob die Vermehrung von Obstfliegen exponentiell oder linear verläuft.
    Nach 5 Tagen zählt er 269 Fliegen; nach 19 Tagen sind es bereits 605 Fliegen.

    (a) Bestimmen Sie den Anfangsbestand der Fliegen, die tägliche Zuwachsrate (in Prozent) und die Fliegenanzahl nach 31 Tagen bei exponentiellem Wachstum!

    (b) Bestimmen Sie den Anfangsbestand, den täglichen Zuwachs und die Fliegenanzahl nach 31 Tagen bei linearem Wachstum!

13. Bestimmen Sie jeweils x:

    a) $\log_u \frac{1}{u^3} = x$ b) $\log_x \frac{27}{8} = 3$ c) $\log_8 x = \frac{5}{3}$

    d) $\log_x 0{,}008 = -3$ e) $\log_{\sqrt{32}} x = -\frac{6}{5}$ f) $\log_4 \sqrt[7]{16} = x$

    g) $6^{2x+3} = 7$ h) $2^x = 3^{x-2}$ i) $3^{x+1} + 3^x = 4^x$

14. Notieren Sie sich die Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen und vereinfachen Sie folgenden Term soweit wie möglich:

$$\log_b 16 - \log_b 2\sqrt{2b} + \log_b \sqrt{2b} + \log_b(0{,}125b^2)$$

Zusammengesetzte Zufallsexperimente

15. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen rauchen 15%.

    Erstellen Sie zuerst beide Baumdiagramme und die Vierfeldertafel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger

    i) weiblich und raucht? ii) männlich, falls ,,er" raucht? iii) Raucher, falls ,,er" männlich ist?

16. Herr Huber hat eine Alarmanlage in seinem Auto installiert. Es werden die Ereignisse A: „Alarmanlage springt an“ und K: „Jemand versucht, das Auto aufzubrechen“ betrachtet.

    Beschreiben Sie folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Worten: $P_K(A)$, $P_K(\bar{A})$, $P_{\bar{K}}(A)$ und $P_A(K)$. Welche dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten sollten hoch bzw. niedrig sein?

Ganzrationale Funktionen

17. Wie lautet der Funktionsterm einer Potenzfunktion? Skizzieren Sie die Graphen, die zu den Funktionsgleichungen $y = x$, $y = x^3$ und $y = x^5$ gehören in ein Koordinatensystem und die Graphen zu $y = x^2$ und $y = x^4$ in ein weiteres Koordinatensystem.

18. Geben Sie den Funktionsterm einer allgemeinen ganzrationalen Funktion n-ten Grades an. Wie viele Nullstellen kann ein Polynom n-ten Grades höchstens besitzen?

19. Führen Sie die Polynomdivision durch:
$$(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27) : (x - 1)$$

20. Faktorisieren Sie den Funktionsterm der Funktion
$$g: \quad g(x) = 2x^5 - 6,0x^4 - 13,5x^3 + 35x^2; \quad D_g = \mathbb{R}$$
vollständig. Geben Sie die Nullstellen mit Vielfachheit an und skizzieren Sie den Graphen.

Vertiefen der Funktionenlehre

21. Gegeben ist die Funktion $f: \ f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit maximaler Definitionsmenge.
    (a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an.
    (b) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung aber achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
    (c) Geben Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ an.
    (d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem.

22. Geben Sie jeweils die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ an, falls diese existieren:
    a) $f(x) = \frac{-3x+5}{1+2x}$ b) $g(x) = 5 \cdot 2^x$ c) $h(x) = x^6 - x^9$
    d) $k(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ e) $l(x) = \frac{1-x^3}{x^2+1}$ f) $m(x) = \cos(x) \cdot (x^2 + 2x + 5)$

Lösungen

1. (a) $135°$, $164°$ (b) $\frac{2}{3}\pi \approx 2,09$ $\frac{2}{5}\pi \approx 1,26$
2. (a) $18°$ (b) $39\pi \mathrm{m}^2$, $40\pi \mathrm{m}^2$
3. (a) $20^{\frac{1}{3}}$ cm (b) $O_{\text{neu}} : O_{\text{alt}} \approx 0,041$
4. (a) $\approx 33\%$ (b) $\approx 0,3$ mm
5. (a) $V = 80\pi$ cm^3, $O \approx 201,8$ cm^2
   (b) $\approx 46,6\%$ (c) ja (d) 8 cm
6. $112,1°$, $112,1°$,
7. -
8. -
9. (a) Periode: 2π, Amplitude: 1 (b) Periode: $\frac{2}{3}\pi$, Amplitude: 1 (c) Periode: $\frac{2}{3}\pi$, Amplitude: 2
10. Nein, da nur noch 0,06 g vorhanden sein dürften.
11. Nach etwa 34,5 Tagen, d.h. 35 Tagen.
12. (a) 201; 5,96 %; 1209 (b) 149; 24; 893
13. -3; $\frac{3}{2}$; $8^{\frac{5}{3}}$; 5; $\sqrt{32}^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{8}$; $\frac{2}{7}$;
14. 2
15. 6,0 %; 40 %; 6,7 %
16. -
17. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
18. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, höchstens n Nullstellen
19. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
20. $2x^2(x-2)(x-3,5)(x+2,5)$
21. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (b) $f(-x) = f(x)$ (c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
22.

	$x \to -\infty$	$x \to \infty$
a)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
b)	0	∞
c)	∞	$-\infty$

	$x \to -\infty$	$x \to \infty$
d)	0	0
e)	∞	$-\infty$
f)	ex. nicht	ex. nicht