Klasse 11 (G8): Beispielaufgaben für Grundwissen in Mathematik:

Aufgabe 1: 1. Ableitung (vereinfachen, falls möglich):

a) $f(x)=x^2\sin x$ b) $f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$ c) $f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}$ d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ f) $f(x)=\sqrt{x^4-3x+4}$ g) $f(x)=\tan\sqrt{x+1}$

h) $f(x)=x\ln x$ i) $f(x)=\frac{x}{e^x}$

Aufgabe 2: $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2$

a) komplette Kurvendiskussion.

b) Gleichung der Tangente $t(x)$ durch $(2\,|\,f(2))$. Gleichung der Normalen $n(x)$ durch $(2\,|\,f(2))$ und ihre weiteren Schnittpunkte mit G_f.

c) $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}$; Schnittpunkt(e) und –winkel.

d) $h(x)=f(x)+1$; NSt. von h mithilfe von Näherungsverfahren (auf 5 Dezimalen).

Aufgabe 3: $f(x)=\frac{x-2}{x^2+x-6}$; maximale Definitionsmenge, Achsenpunkte, Verhalten an den Rändern des maximalen Definitionsbereichs, Asymptoten, erste Ableitung und Monotonieverhalten, Graph, Wertemenge.

Aufgabe 4: $f_a(x)=x^4-2ax^2$

a) Scharkurve(n) durch $(1\,|\,-3)$.

b) Punkte mit waagrechter Tangente.

Aufgabe 5: $f(x)=-x^2(x-2)$; $P(a\,|\,?)\in G_f$, $a\in[0;2]$. Rechteck hat Ursprung und P als Ecken, Seiten sind parallel zu Koordinatenachsen. P soll so bestimmt werden, dass das Rechteck maximalen Flächeninhalt hat.

Aufgabe 6: Bestimmung des Terms einer Polynomfunktion 3. Grades, symmetrisch zum Punkt $(2\,|\,-2)$ und Ursprung als HOP.

Aufgabe 7: (Altersbestimmung mithilfe der Radiocarbonmethode)

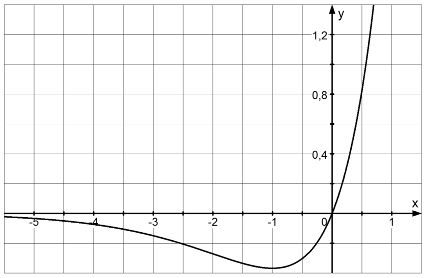
Beim radioaktiven Zerfall des Kohlenstoffisotops ^{14}C ist die Zerfallskonstante $\lambda=1{,}210\cdot10^{-4}$. Die Zeit wird in Jahren angegeben.

a) Ursprünglich befinden sich $5{,}8\cdot10^{12}$ Atome in einer Probe. Berechnen Sie, wie viele Atome in 15 000 Jahren zerfallen!

b) Bestimmen Sie die Halbwertszeit in Jahren!

Aufgabe 8: Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot e^x$, $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph ist in nebenstehendem Diagramm ersichtlich.



a) Bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern von D_f.

b) Bestimmen Sie die mittlere Steigung im Intervall [-1; 0]!

c) Bestimmen Sie mithilfe der ersten Ableitung von f Art und Lage des Extrempunktes!

d) Begründen Sie mithilfe des obigen Graphen, an welcher Stelle die Stammfunktion F von f einen Extrempunkt hat und um welche Art von Extremum es sich handelt.

Aufgabe 9: Gegeben ist folgende Funktion: $f: x \mapsto \ln(x^2+1)$

mit maximalem Definitionsbereich D_f, Wertemenge W_f und dem Graphen G_f.

a) Geben Sie D_f und die Symmetrie zum KoSy an!

Bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern von D_f und den Achsenpunkt!

b) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung, Art und Lage des Extrempunktes!

Geben Sie W_f an! [zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$]

c) Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse möglichst genau im Bereich $-5 \le x \le 5$ und $-2 \le y \le 4$!

d) Zusätzlich ist die Funktion $g(x) = \ln(2x)$ gegeben. (Es ist $g(0{,}5) = 0$.)

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f und g und begründen Sie, dass sich die Graphen in diesem Punkt berühren! Skizzieren Sie G_g in das KoSy von Teilaufgabe c!

Aufgabe 10: Eine Gruppe erfährt beim Besuch des British Museum, dass 35% aller Besucher männlich sind, 60% aller Besucher eine Ermäßigung erhalten und 26% aller Besucher weiblich sind und keine Ermäßigung erhalten. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf Unabhängigkeit:

M: „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist männlich.“

E: „Ein zufällig ausgewählter Besucher erhält eine Ermäßigung.“

Aufgabe 11: In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|-4|3)$, $B(1|4|-2)$, $C(-2|4|1)$ und $S(3|2|6)$ gegeben.

a) Das Dreieck ΔABC hat einen rechten Winkel bei C. Zeigen Sie dies!

Ermitteln Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U (Thaleskreis!) !

Geben Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H an!

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass es sich beim $ABCD$ um ein (ebenes) Viereck handelt, bei dem sich die Diagonalen halbieren!

c) Die Pyramide $ABCDS$ hat die Grundfläche $ABCD$ und die Spitze S!

Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen von $ABCD$ gleichzeitig der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist!

Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen der Pyramide!

Eine Kugel K hat S als Mittelpunkt und geht durch die Punkte B und D.

Geben Sie eine Gleichung von K an und bestimmen Sie, wie viel Prozent ihres Volumens die Pyramide $ABCDS$ einnimmt! Zeigen Sie, dass A innerhalb und D auf K liegt!