Lösungen zu „Klasse 11 (G8): Beispielaufgaben für Grundwissen in Mathematik“:

Aufgabe 1: 1. Ableitung (vereinfachen, falls möglich):

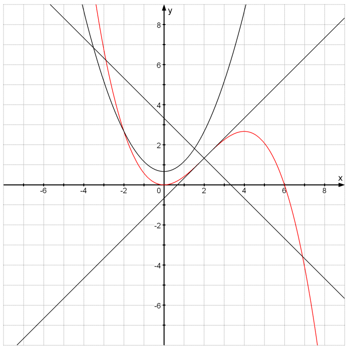
a) $f'(x) = x(2\sin x + x\cos x)$ b) $f'(x) = \dfrac{x\sin x + \sin x + \cos x}{\cos^2 x}$ c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 7}{(x+1)^2}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ e) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} = -\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(x-1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 3}{2\sqrt{x^4 - 3x + 4}}$ g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\cdot\cos^2\sqrt{x+1}}$

h) $f'(x) = \ln(x) + 1$ i) $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$.

Aufgabe 2: $f(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$



a) $D_{f,\max} = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $W_f = \mathbb{R}$;

Achsenp. $(0\,|\,0)$; $(6\,|\,0)$; $TIP(0\,|\,0)$; $HOP(4\,|\,2\frac{2}{3})$;

emf auf $\mathbb{R}^-$ und auf $[4;+\infty[$; ems auf $[0;4]$;

G_f symmetrisch zu $(2\,|\,1\frac{1}{3})$.

b) $t(x) = x - \dfrac{2}{3}$; $n(x) = -x + 3\dfrac{1}{3}$; $(2 - 2\sqrt{6}\,|\,\frac{4}{3} + 2\sqrt{6})$; $(2 + 2\sqrt{6}\,|\,\frac{4}{3} - 2\sqrt{6})$.

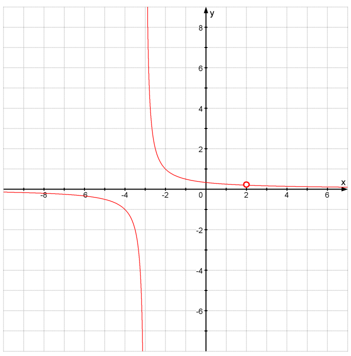
c) $(-2\,|\,2\frac{2}{3})$; $\varphi \approx 8{,}13°$.

d) $h(x) = f(x) + 1 = -\dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 1$; $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \dfrac{-\frac{1}{12}x_n^3 + \frac{1}{2}x_n^2 + 1}{-\frac{1}{4}x_n^2 + x_n}$;

Nullst. $x \approx 6{,}30214$.

Aufgabe 3: $D_{f,\max} = \mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$; Achsenp. $(0\,|\,\frac{1}{3})$; $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \dfrac{1}{5}$;

stetig behebbare Def.lücke $x = -2$; stetige Fortsetzung $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x+3}$; $D_{\tilde{f},\max} = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asympt. $y = 0$;

$\lim\limits_{x\to-3-0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-3+0} f(x) = +\infty$;

senkrechte Asympt. $x = -3$;

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$;

emf auf $]-\infty;-3[$ und auf $]-3;+\infty[\,\setminus\{2\}$; $W_f = \mathbb{R}\setminus\{0;\frac{1}{5}\}$.

Aufgabe 4:

a) $f_2(x) = x^4 - 4x^2$.

b) $(-\sqrt{a} \mid a^2)$; $(0 \mid 0)$; $(\sqrt{a} \mid a^2)$.

Aufgabe 5: $P(1{,}5 \mid 1{,}125)$.

Aufgabe 6: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$.

Aufgabe 7:

7) $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot e^{-1{,}210 \cdot 10^{-4} \cdot t}$; t: Zeit in Jahren

a) $N(15\,000) = 5{,}8 \cdot 10^{12} \cdot e^{-1{,}210 \cdot 10^{-4} \cdot 15000} \approx 0{,}94 \cdot 10^{12}$

$\Rightarrow 5{,}8 \cdot 10^{12} - 0{,}94 \cdot 10^{12} = 4{,}86 \cdot 10^{12}$ Atome zerfallen.

b) $N(T) = \frac{1}{2} N_0$; $N_0 \cdot e^{-1{,}210 \cdot 10^{-4} \cdot T} = \frac{1}{2} N_0 \Leftrightarrow e^{-1{,}210 \cdot 10^{-4} \cdot T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1{,}210 \cdot 10^{-4} \cdot T = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1{,}210 \cdot 10^{-4}} = \frac{\ln 2}{1{,}210 \cdot 10^{-4}} \approx 5728$ [Jahre] (Halbwertszeit)

Aufgabe 8:

8) $f(x) = x \cdot e^x$ $D_f = \mathbb{R}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \text{"} -\infty \cdot e^{-\infty} \text{"} = \text{"} -\infty \cdot (+0) \text{"} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \text{"} \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}} \text{"} = \text{"} \frac{-\infty}{+\infty} \text{"} \overset{\text{L'H.}}{=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \text{"} \frac{1}{-e^{-(-\infty)}} \text{"} = \text{"} \frac{1}{-\infty} \text{"} = -0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{"} +\infty \cdot e^{+\infty} \text{"} = \text{"} +\infty \cdot (+\infty) \text{"} = +\infty$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{0 - (\frac{-1}{e})}{1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

c) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot \underbrace{e^x}_{>0}$ hat NSt $x = -1$ mit VZW von $-$ nach $+$

$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$ TiP$(-1 \mid -\frac{1}{e})$

d) $F'(x) = f(x)$ hat NSt $x = 0$ mit VZW von $-$ nach $+$

$\Rightarrow$ F hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum.

Aufgabe 9:

9) $f(x) = \ln(x^2+1)$

a) $\underline{D_f = \mathbb{R}}$; G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \text{"}\ln((\pm\infty)^2+1)\text{"} = \text{"}\ln(+\infty+1)\text{"} = \text{"}\ln +\infty\text{"} = +\infty$

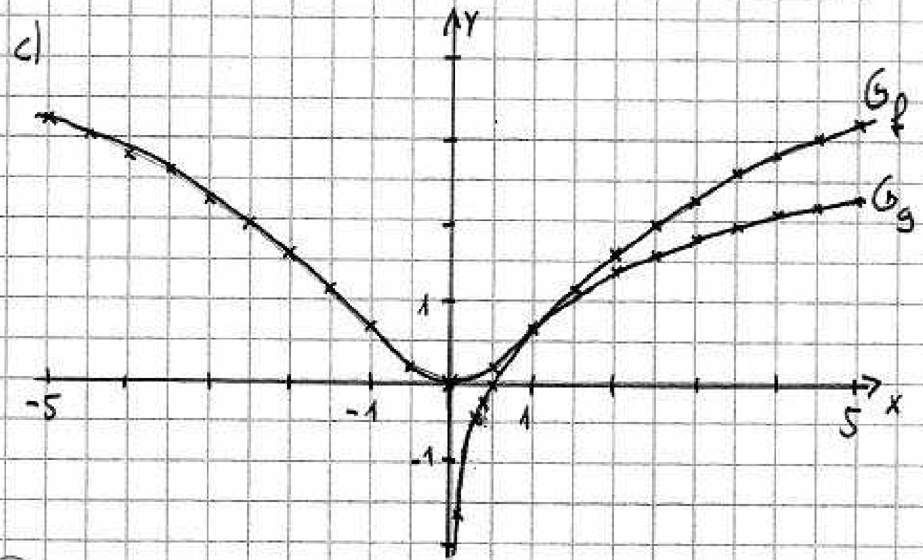
$f(0) = \ln 1 = 0$; $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$. Achsenp. $(0|0)$

b) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$; $f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

Nenner von f' ist >0 also hat f' Vorzeichen d. Zählers, also

NSt $x=0$ mit VZW von $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ TIP$(0|0)$. $W_f = \mathbb{R}_0^+$

c)



d) $g(x) = \ln(2x)$; $g(0,5) = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \ln 2x \Leftrightarrow x^2+1 = 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ doppelte Lösung $\Rightarrow G_f$ u. G_g berühren sich.

$g(1) = \ln 2 \Rightarrow$ Berührpunkt $(1|\ln 2)$

Aufgabe 10:

	M	$\overline{M}$	
E	21%	39%	60%
$\overline{E}$	14%	26%	40%
	35%	65%	100%

$P(M) \cdot P(E) = 35\% \cdot 60\% = 0{,}35 \cdot 0{,}60 = 0{,}21 = 21\% = P(M \cap E)$

$\Rightarrow$ Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

<u>Aufgabe 11</u>: $A(0|-4|3)$, $B(1|4|-2)$, $C(-2|4|1)$, $S(3|2|6)$.

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \;\Rightarrow\; \Delta ABC$ hat rechten Winkel bei C.

$U(0{,}5|0|0{,}5)$ (Streckenmitte von Hypotenuse [AB]).

$H(-2|4|1)$ ($H=C$).

b) $D(-3|-4|6)$ (Parallelogramm: $\vec{D}=\vec{A}+\overrightarrow{BC}$)

c) $M(-1|0|2)$ ($\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C})$.

$$\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\12\\24\end{pmatrix}=12\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\parallel\overrightarrow{MS}\qquad \text{q.e.d.}$$

$$h=\overline{MS}=2\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}=2\cdot 3=6;\qquad G=A_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=12\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}=36;$$

$$V_{ABCDS}=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 6=72.$$

$$A_{CDS}=A_{ABS}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}54\\-18\\-18\end{pmatrix}\right|=9\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right|=9\cdot\sqrt{3^2+1^2+1^2}=9\sqrt{11};$$

$$A_{BCS}=A_{ADS}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-18\\18\\-18\end{pmatrix}\right|=9\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=9\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}=9\sqrt{3};$$

$$A_{ABCDS}=G+2\cdot A_{ABS}+2\cdot A_{ADS}=36+2\cdot 9\sqrt{11}+2\cdot 9\sqrt{3}=36+18\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{3})\approx 126{,}88$$

$$r=BS=\sqrt{2^2+(-2)^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

Kugelgleichung: $K:\ \left[\vec{X}-\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}\right]^2=72$ $\qquad\left(\left(\vec{X}-\vec{S}\right)^2=r^2\right)$

$$\frac{V_{ABCDS}}{V_K}=\frac{V_{ABCDS}}{\frac{4}{3}\pi r_k^3}=\frac{72}{\frac{4}{3}\pi(6\sqrt{2})^3}=\frac{1}{8\sqrt{2}\pi}\approx 2{,}81\%$$ des Kugelvolumens nimmt $ABCDS$ ein.

A in K: $\left[\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}-3\\-6\\-3\end{pmatrix}^2=3^2+6^2+3^2=54<72 \;\Rightarrow\; A$ liegt in K.

D in K: $\left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}^2=6^2+6^2+0^2=72 \;\Rightarrow\; D$ liegt auf K.